

# MIMO 相关信道估计中训练序列的最优结构和最佳长度

庞继勇, 李建东, 赵林靖

(西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室 信息科学研究所 宽带无线通信实验室, 陕西西安 710071)

**摘要:** 针对存在空域相关性的多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 信道, 首先设计了适用于任何给定长度的最优训练序列, 该序列能够充分利用已知的信道相关信息, 且具有估计均方误差最小化的特性. 在此基础上, 分析了相关信道下采用训练估计的数据传输机制所能达到的容量下界, 得出了满足估计准确性和数据速率最优折中的最佳训练序列长度. 最后, 通过仿真验证了本文给出的训练序列的性能和最佳长度取值的有效性.

**关键词:** 多输入多输出; 信道估计; 训练序列; 空域相关; 信道容量

**中图分类号:** TN929.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 6A-035-06

## Optimal Structure and Length of Training Sequences for Channel Estimation in Spatially Correlated MIMO Channels

PANG Ji-yong, LI Jian-dong, ZHAO Lin-jing

(Broadband Wireless Communications Laboratory, Information Science Institute,  
State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** The optimal design of training sequences for Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) channel estimation with spatial correlation is considered. Based on the criterion of Minimum Mean Square Error (MMSE), the optimal training sequences that have controllable length are designed to exploit full information of the spatial correlation. Furthermore, a lower bound on the capacity of a training-based MIMO system is derived, from which the optimal number of training symbols is given. It is investigated that the proposed training sequences have good performance and the capacity lower bound is valid.

**Key words:** MIMO; channel estimation; training sequences; spatial correlation; channel capacity

### 1 引言

多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 技术具有极大的容量提升潜能, 可以在不增加系统带宽和发射功率的前提下显著地提高无线通信系统的传输速率<sup>[1,2]</sup>, 已成为当前广泛认同的支持未来移动通信 (B3G 或者 4G) 高速率要求的一大关键技术和研究热点<sup>[3,4]</sup>. 然而, 要想达到 MIMO 系统的理论性能, 接收机必须能够获知当前信道的状态信息, 所以, 准确和有效的信道估计在 MIMO 系统的实现和应用中是非常关键的. 考虑到实现的复杂度和估计的可靠性, 在标准制定和实际系统中通常采用基于训练序列的信道估计方法, 其实现简单且在大多数场合下具有可观的性能<sup>[5]</sup>.

对于采用训练序列进行信道估计的传输机制而言,

需要解决的两大关键问题是如何设计最优的训练序列以及如何平衡训练和数据传输的比例. 更为本质地讲, 就是要实现信道估计准确性和数据传输速率最大化之间的最优折衷, 即在满足信道参数可辨识的前提下使得信道容量最大化. 业已证明<sup>[6,7]</sup>, 对于一个具有  $N_t$  个发射天线和  $N_r$  个接收天线的 MIMO 单用户系统, 若信道服从独立同分布 (i. i. d.) 的平坦 Rayleigh 衰落, 训练长度  $T_r = N_t$  的正交训练序列可以实现估计性能和数据速率之间的最优折衷.

然而, 在实际电波传播环境中, MIMO 信道很难满足独立性假设, 通常会具有因来波角度扩展不够、天线元素间距较小等因素所引入的信号空域衰落相关性<sup>[8,9]</sup>. 因此, 有必要研究 MIMO 相关信道下的最优训练机制及其可达到的容量性能. 若接收机可以获得当前的

收稿日期: 2007-06-14; 修回日期: 2007-10-22

基金项目: 国家杰出青年科学基金 (No. 60725105, 通信网); 国家自然科学基金重大项目 (No. 60496316); 国家自然科学基金 (No. 60572146); 高等学校博士学科点专项科研基金 (No. 20050701007); 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划; 教育部科学技术研究重点项目 (No. 107103)

信道相关信息,则其可以利用这一信息来提高信道估计的准确性;若发射机也已知信道相关信息,则其可以对训练序列进行优化设计,从而进一步提高估计可靠性<sup>[10,11]</sup>.然而,至今尚未有文献讨论给定信道相干时间的基于训练估计的 MIMO 相关信道容量下界以及最优的训练序列长度.

因此,本文首先在文献[10,11]的基础上,采用最为常用和典型的 Kronecker 分离相关模型和最小均方误差 (Minimum Mean Square Error, MMSE) 估计方法,设计任一给定的训练序列长度前提下的最优的训练序列结构;进而,借鉴文献[7]中的最大化容量下界的思想,推导出 MIMO 相关信道下的基于训练序列信道估计的容量下界,并利用该下界计算出相关信道估计中所应采用的训练序列长度的最佳值.

符号说明:大写(小写)黑斜体字母表示矩阵(向量),上标 T 和 H 分别表示转置和共轭转置,⊗ 表示 Kronecker 乘积,  $E(\cdot)$  代表数学期望,  $\text{vec}(\mathbf{X})$  将矩阵  $\mathbf{X}$  按列堆积成列向量.  $\mathbf{X}^{-1}$ 、 $\mathbf{X}^{1/2}$ 、 $\text{tr}(\mathbf{X})$  和  $\lambda_i(\mathbf{X})$  分别表示矩阵  $\mathbf{X}$  的逆、平方根、迹和第  $i$  个特征值.  $x^+$  表示  $\max(0, x)$ .  $\mathbf{X}(i, j)$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素,  $\lceil \cdot \rceil$  表示向上取整.

## 2 系统模型

考虑一个具有  $N_t$  个发射天线和  $N_r$  个接收天线的 MIMO 系统,信道服从相干时间为  $T_c$  个符号周期的块平坦 Rayleigh 衰落<sup>[7]</sup>.用于训练序列和数据传输的符号长度分别为  $T_r$  和  $T_d$  个符号 ( $T_r + T_d = T_c$ ).则训练周期内的收发信号关系可以表示为:

$$\mathbf{X}_r = \sqrt{\frac{\rho_t}{N_t}} \mathbf{S}_r \mathbf{H} + \mathbf{N}_r \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{S}_r$  是  $T_r \times N_t$  维训练序列矩阵,满足  $\text{tr}(\mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r) = N_t T_r$ ;  $\mathbf{X}_r$  是  $T_r \times N_r$  维接收信号矩阵,  $\mathbf{N}_r$  是  $T_r \times N_r$  维复高斯随机噪声矩阵,其元素服从 0 均值、单位方差的 i. i. d. 复高斯分布.  $\mathbf{H}$  是  $N_t \times N_r$  维复值信道矩阵,其每个元素的均值为 0,方差归一化为 1.  $\rho_t$  是训练周期内的平均发射功率,也即训练周期内的单个接收天线上的平均接收信噪比(SNR).

### 2.1 Kronecker 相关模型

Kronecker 相关信道模型,不仅结构简单、易于理论分析,而且能够较好地与多数实际场景相吻合,因而得到了广泛的应用,并已被 802.11n 和 802.16 等标准所采纳<sup>[9]</sup>.假定信道收发两端的空域相关矩阵分别为  $\mathbf{R}_t$  和  $\mathbf{R}_r$ ,将信道矩阵  $\mathbf{H}$  按列向量化,记作  $\mathbf{h} = \text{vec}(\mathbf{H})$ ,其  $N_t N_r \times N_t N_r$  维自协方差矩阵为  $\mathbf{R}_h = E(\mathbf{h} \mathbf{h}^H)$ .则根据 Kronecker 相关模型有<sup>[8,12]</sup>:

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{R}_t \otimes \mathbf{R}_r \quad (2)$$

这里,列出两个后文将用到的有关信道相关矩阵的特性:

①因为信道矩阵  $\mathbf{H}$  中各元素的方差被归一化为 1,所以有  $\text{tr}(\mathbf{R}_t) = N_t$ 、 $\text{tr}(\mathbf{R}_r) = N_r$  和  $\text{tr}(\mathbf{R}_h) = N_t N_r$ ;

②令矩阵  $\mathbf{R}_t$  和  $\mathbf{R}_r$  的特征值分解形式分别为  $\mathbf{U}_t \mathbf{D}_t \mathbf{U}_t^H$  和  $\mathbf{U}_r \mathbf{D}_r \mathbf{U}_r^H$ ,则  $\mathbf{R}_h$  的特征值分解可以表示为  $(\mathbf{U}_t \otimes \mathbf{U}_r)(\mathbf{D}_t \otimes \mathbf{D}_r)(\mathbf{U}_t \otimes \mathbf{U}_r)^H$ ,记作  $\mathbf{R}_h = \mathbf{U}_h \mathbf{D}_h \mathbf{U}_h^H$ ,  $\mathbf{U}_h = \mathbf{U}_t \otimes \mathbf{U}_r$  和  $\mathbf{D}_h = \mathbf{D}_t \otimes \mathbf{D}_r$  (特征值由大到小排列);

需要说明的是,信道的空域相关性属于信道系数的二阶统计特性,相对于信道系数的相干时间,空域相关特性的时变速率通常要缓慢得多<sup>[11,13]</sup>,因此,本文假定收发两端均可获知完全准确信道相关信息.

### 2.2 MMSE 信道估计

将式(1)描述为如下的向量化形式:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{X}_r) &= \sqrt{\frac{\rho_t}{N_t}} (\mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{S}_r) \text{vec}(\mathbf{H}) + \text{vec}(\mathbf{N}_r) \Rightarrow \\ \mathbf{x}_r &= \sqrt{\frac{\rho_t}{N_t}} \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{h} + \mathbf{n}_r \end{aligned} \quad (3)$$

则采用线性 MMSE 估计方法得到的信道  $\mathbf{h}$  的估计值  $\hat{\mathbf{h}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{H}})$  可以表示为<sup>[7,11]</sup>:

$$\hat{\mathbf{h}} = \sqrt{\frac{\rho_t}{N_t}} \left( \mathbf{R}_h^{-1} + \frac{\rho_t}{N_t} \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \right)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_r^H \mathbf{x}_r \quad (4)$$

令信道估计误差为  $\tilde{\mathbf{h}} = \text{vec}(\tilde{\mathbf{H}}) = \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}$ ,其协方差矩阵为  $\mathbf{R}_h$ ,则估计均方误差(MSE)可以由下式计算:

$$\text{MSE} = \text{tr}(\mathbf{R}_h) = \text{tr} \left( \mathbf{R}_h^{-1} + \frac{\rho_t}{N_t} \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \right)^{-1} \quad (5)$$

## 3 最优训练序列结构

由式(4)和式(5)可知,MMSE 信道估计的性能由信道相关矩阵和采用的训练序列所决定.显然地,对于给定的环境和系统,提高信道估计准确性的方法是设计能够“匹配”当前信道相关信息的训练序列,尽可能地降低信道估计 MSE.

### 3.1 最优训练序列结构

将式(5)进一步表示为:

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \text{tr} \left( \mathbf{U}_h \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{U}_h^H + \frac{\rho_t}{N_t} \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \right)^{-1} \\ &= \text{tr} \left( \mathbf{D}_h^{-1} + \frac{\rho_t}{N_t} \mathbf{U}_h^H \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{U}_h \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

根据最优化理论,当且仅当  $\mathbf{U}_h^H \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{U}_h$  为一对角矩阵时,式(6)具有最小值<sup>[11]</sup>,此时的  $\tilde{\mathbf{S}}_r$  被称作最优的训练序列.

**定理 1** (最优的训练序列结构) 对于任一给定的训练长度  $T_r$ ,最优的训练序列矩阵  $\tilde{\mathbf{S}}_r$  具有如下形式:

$$\tilde{\mathbf{S}}_r = \mathbf{U} \mathbf{D}_r^{1/2} \mathbf{U}_r^H \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{U}$  为任一  $T_r \times T_r$  维酉矩阵,  $\mathbf{D}_r$  为一待定的  $T_r \times N_t$  维对角矩阵, 其对角元素 (非负) 决定了最优的功率分配.

证: 将  $\mathbf{U}_h^H \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{U}_h$  展开为如下的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_h^H \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{U}_h &= (\mathbf{U}_r \otimes \mathbf{U}_t)^H (\mathbf{I}_{N_t} \otimes \mathbf{S}_r)^H (\mathbf{I}_{N_t} \otimes \mathbf{S}_r) (\mathbf{U}_r \otimes \mathbf{U}_t) \\ &= \mathbf{I}_{N_t} \otimes (\mathbf{U}_r^H \mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r \mathbf{U}_r) \end{aligned} \quad (8)$$

由于式(6)只有在  $\mathbf{U}_h^H \tilde{\mathbf{S}}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{U}_h$  为对角矩阵时才可达到其最小值, 因此  $\mathbf{U}_r^H \mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r \mathbf{U}_r$  必须为一个对角矩阵. 令  $\mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r$  的特征值分解为  $\mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^H$ , 取  $\mathbf{V} = \mathbf{U}_r$ , 则有  $\mathbf{U}_r^H \mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r \mathbf{U}_r = \mathbf{D}$ . 根据  $\mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r$  的特征值分解和  $\mathbf{S}_r$  的奇异值分解的关系, 不难得到  $\mathbf{S}_r = \mathbf{D}_r^{1/2} \mathbf{U}_r^H$ . 其中, 当  $T_r \geq N_t$  时, 有

$$\mathbf{D}_r^{1/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{1/2} \\ \mathbf{0}_{(T_r - N_t) \times N_t} \end{bmatrix}; \text{ 当 } T_r < N_t \text{ 时, } \mathbf{D}_r^{1/2} = \mathbf{D}_{[1:T_r, :]}^{1/2} \text{ (取 } \mathbf{D}^{1/2} \text{ 的前 } T_r \text{ 行)}. \text{ 更一般地, 如果对此最优的 } \mathbf{S}_r \text{ 左乘任一 } T_r \times T_r \text{ 维酉矩阵 } \mathbf{U}, \text{ 同样能够满足 } \mathbf{U}_t^H \mathbf{S}_r^H \tilde{\mathbf{S}}_r \mathbf{U}_t = \mathbf{D}.$$

证毕

### 3.2 数值计算

根据定理 1, 求解最优的训练序列就是要确定使 MSE 最小的对角矩阵  $\mathbf{D}$ . 将式(6)进一步展开为:

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \text{tr} \left( \mathbf{D}_h^{-1} + \frac{\rho_r}{N_t} \mathbf{I}_{N_t} \otimes \mathbf{D} \right)^{-1} \\ &= \text{tr} \left( (\mathbf{D}_r \otimes \mathbf{D}_t)^{-1} + \frac{\rho_r}{N_t} \mathbf{I}_{N_t} \otimes \mathbf{D} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $d_i (i = 1, 2, \dots, N_t)$  是矩阵  $\mathbf{D}$  的对角元素, 且  $\text{tr}(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^{N_t} d_i = \text{tr}(\mathbf{S}_r^H \mathbf{S}_r) = N_t T_r$ .

在收发两端均存在空域相关时,  $d_i$  只能通过最优化迭代算法进行求解而没有显式解. 然而, 当仅存在发端空域相关, 即  $\mathbf{R}_r = \mathbf{I}_{N_t}$  时, 有  $\mathbf{D}_r = \mathbf{I}_{N_t}$ , 此时式(9)可以化简为:

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{\text{noTr}} &= \text{tr} \left( \mathbf{I}_{N_t} \otimes \mathbf{D}_t^{-1} + \frac{\rho_r}{N_t} \mathbf{I}_{N_t} \otimes \mathbf{D} \right)^{-1} \\ &= N_r \sum_{i=1}^{N_t} \left( d_{t,i}^{-1} + \frac{\rho_r}{N_t} d_i \right)^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

应用 Lagrange 数乘法, 不难解得:

$$d_i = \left\{ \left( \frac{\rho_r}{N_t} \mu \right)^{-1/2} - \frac{N_t}{\rho_r} d_{t,i}^{-1} \right\}^+ \quad (11)$$

其中,  $\mu$  可以由约束条件  $\text{tr}(\mathbf{D}) = N_t T_r$  通过迭代的方式求得.

在仅存在收端空域相关、较高信噪比和较低信噪比时, 也可以得到闭式解或简洁的求解式 (因后文只针对仅存在发端空域相关的情况进行论述, 简便起见, 这里不再一一列出, 具体请参见文献[14])

### 4 最佳训练序列长度

定理 1 给出了给定训练长度下的最优训练序列结

构, 但对于给定的信道相干时间, 另一个关键的问题是如何确定  $T_r$  的最佳取值. 文献[7]从信道容量 (下界) 的角度很好地分析了独立信道下  $T_r$  的最佳取值问题. 沿用其基本思想, 本节将推导出相关信道下基于训练机制的传输系统的容量下界, 从而通过最大化信道容量来确定最佳的  $T_r$ .

#### 4.1 容量下界

在数据传输周期  $T_d$  内的每一次信道使用中, 收发信号之间的数学模型为:

$$\mathbf{x}_d = \sqrt{\frac{\rho_d}{N_t}} \mathbf{s}_d \hat{\mathbf{H}} + \underbrace{\sqrt{\frac{\rho_d}{N_t}} \mathbf{s}_d \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{n}_d}_{\mathbf{v}_d} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{x}_d$  是  $1 \times N_r$  维接收向量信号,  $\mathbf{s}_d$  是  $1 \times N_t$  维发射向量信号 ( $\text{tr}(\mathbf{R}_{s_d}) = \text{tr}E(\mathbf{s}_d^H \mathbf{s}_d) = N_t$ ).  $\rho_d$  是数据传输周期内的平均发射功率.  $\mathbf{v}_d$  是由信道估计剩余误差和加性噪声组成的等效噪声, 其元素方差为  $1 + \rho_d \sigma_{h,R_t}^2$ , 其中  $\sigma_{h,R_t}^2 = \frac{1}{N_t N_r} E(\text{tr} \tilde{\mathbf{H}}^H \mathbf{R}_{s_d} \tilde{\mathbf{H}})$  为归一化均方误差.

对于给定的基于训练估计的传输机制, 假定等效噪声  $\mathbf{v}_d$  服从 0 均值的复高斯分布 (最差情况), 则可以获得如下的容量下界 (最大化最差情况下的容量)<sup>[7]</sup>:

$$C_{\text{worst}} = \min_{\mathbf{R}_v} \max_{\mathbf{R}_{s_d}} \left[ E \left( \frac{T_c - T_r}{T_c} \right) \right] \log \det \left( \mathbf{I}_{N_r} + \rho_{\text{eff}} \frac{\bar{\mathbf{H}}^H \mathbf{R}_{s_d} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{R}_v^{-1}}{N_t} \right) \quad (13)$$

其中,  $\rho_{\text{eff}} = \frac{\rho_d \sigma_h^2}{1 + \rho_d \sigma_{h,R_t}^2}$  为等效信噪比,  $\mathbf{R}_{v_d} = E(\mathbf{v}_d^H \mathbf{v}_d)$  是

$\mathbf{v}_d$  的协方差矩阵,  $\mathbf{R}_v = \frac{1}{1 + \rho_d \sigma_{h,R_t}^2} \mathbf{R}_{v_d}$ ,  $\bar{\mathbf{H}} \triangleq \frac{1}{\sigma_h} \hat{\mathbf{H}}$ ,  $\sigma_h^2 = 1 - \sigma_{h,R_t}^2$ .

由式(13)可知, 确定  $C_{\text{worst}}$  就是要寻找满足要求的  $\mathbf{R}_v$  和  $\mathbf{R}_{s_d}$ . (1) 对于相关信道,  $\bar{\mathbf{H}}$  不再满足右旋转不变性, 所以使式(13)最小的  $\mathbf{R}_v$  不再是一个单位矩阵<sup>[7]</sup>, 然而, 为了容量下界分析的可实现性, 本文依旧假定  $\mathbf{R}_v = \mathbf{I}_{N_r}$ ; (2) 最优的发射信号协方差矩阵取决于信道估计  $\bar{\mathbf{H}}$  的分布, 若信道估计完全准确 (即  $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ ), 在发射机已知信道相关信息的假定下, 文献[15]给出了最优的  $\mathbf{R}_{s_d}$ . 当存在信道估计误差时, 虽然发射机已知  $\mathbf{R}_h$ , 但却无法获得  $\mathbf{R}_h$  ( $\mathbf{R}_h = \frac{1}{\sigma_h^2} (\mathbf{R}_h - \mathbf{R}_h)$ ) 的明确信息. 所以关于  $\mathbf{R}_{s_d}$  合理的选择就是  $\mathbf{R}_{s_d} = \mathbf{I}_{N_t}$ .

事实上, 在同功率同分布的情况下, 白噪声信道的容量是最低的, 所以假定 1 相当于放松了式(13)中的下界; 而假定 2 由于忽略了先验信息, 自然地也就使式(13)的下界降低了. 因为本文的目的是推导出利于分析的容量下界 (并非最紧下界), 所以上述两个假定是合

理的。

于是,有:

$$\sigma_{h, R_i}^2 = \frac{1}{N_i N_r} E(\text{tr} \tilde{H}^H \tilde{H}) = \frac{1}{N_i N_r} \text{MSE} \triangleq \sigma_h^2 \quad (14)$$

此时,等效信噪比  $\rho_{\text{eff}}$  可以写作:

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\rho_d \sigma_h^2}{1 + \rho_d \sigma_h^2} = \frac{1 + \rho_d}{1 + \rho_d \sigma_h^2} - 1 \triangleq \rho_{\text{eff}}^1 \quad (15)$$

相应地,式(13)可以进一步简化为:

$$C_{\text{worst}} = E \frac{T_c - T_r}{T_c} \log \det \left( I_{N_i} + \rho_{\text{eff}}^1 \frac{\bar{H}^H \bar{H}}{N_i} \right) \quad (16)$$

### 4.2 训练参数的选取

由式(15)和式(16)不难看出:对于给定的  $\rho_d$ , 等效信噪比  $\rho_{\text{eff}}^1$  只与归一化估计均方误差  $\sigma_h^2$  有关, 而  $\sigma_h^2$  与  $T_r$  紧密相关; 训练序列长度  $T_r$  一方面通过因子  $\frac{T_c - T_r}{T_c}$  与容量呈线性(递减)关系, 另一方面通过影响等效信噪比而与容量呈对数函数(递增)关系. 显然, 不同的训练机制因具体参数 ( $T_r/T_d, \rho_r/\rho_d$ ) 不同, 会导致不同的容量下界. 因此, 使容量下界  $C_{\text{worst}}$  最大化, 将是一个确定最优训练参数的有效准则.

为了建立  $C_{\text{worst}}$  与参数 ( $T_r/T_d, \rho_r/\rho_d$ ) 之间的显式的便于分析的关系式, 需要对式(15)和式(16)做一定的简化和近似. 显然, 必须首先从式(14)入手, 得到  $\sigma_h^2$  与参数 ( $T_r, \rho_r$ ) 的明确关系. 鉴于推导的难度和可操作性, 本文只对无接收端空域相关的信道场景做出理论分析(其他情况的讨论参见 4.3 节).

假定  $R_i = I_{N_i}$ , 令  $\text{rank}(R_i) = K \leq N_i$ , 由式(10)和式(11)不难得到:

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^K \left( d_{i,i}^{-1} + \frac{\rho_r}{N_i} d_i \right)^{-1} \quad (17)$$

考查式(17)在  $\text{tr}(R_i) = N_i$  和  $\text{tr}(D) = N_i T_r$  约束下的最大值问题. 根据最优化理论<sup>[11,16]</sup>, 由于  $\sigma_h^2$  是向量  $d_i = (d_{i,1}, \dots, d_{i,K})$  的 Schur 凹函数 ( $d_{i,i} > 0, d_i \geq 0$ ), 所以当  $d_{i,1} = d_{i,2} = \dots = d_{i,K}$  时,  $\sigma_h^2$  取得最大值. 也就是说, 随着  $R_i$  的特征值散度 ( $H$  的条件数的加大), 即随着信道空域相关性的增强,  $\sigma_h^2$  将逐渐减小; 当  $R_i$  具有  $K$  个相等的特征值时,  $\sigma_h^2$  达到最大值. 于是, 可以得到如下的不等式:

$$\sigma_h^2 \leq \frac{K}{N_i} \left( \left( \frac{N_i}{K} \right)^{-1} + \frac{\rho_r N_i T_r}{N_i K} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_r}{K^2/N_i} T_r} \quad (18)$$

显然,  $\frac{1}{1 + \frac{\rho_r}{K^2/N_i} T_r} \leq \frac{1}{1 + \frac{\rho_r}{N_i} T_r}$ , 即  $\sigma_h^2$  一定小于信道  $H$  完全独立时的归一化估计均方误差.

根据式(18), 可以得出:

$$\rho_{\text{eff}}^1 = \frac{1 + \rho_d}{1 + \rho_d \sigma_h^2} - 1 \geq \frac{\rho_d \rho_r T_r}{\frac{K^2}{N_i} (1 + \rho_d) + \rho_r T_r} \triangleq \rho_{\text{eff}}^* \quad (19)$$

相应地, 可以得到一个比式(16)更便于分析的(放松后的)下界  $C_{\text{lb}}$ :

$$C_{\text{worst}} \geq C_{\text{lb}} = E \frac{T_c - T_r}{T_c} \log \det \left( I_{N_i} + \rho_{\text{eff}}^* \frac{\bar{H}^H \bar{H}}{N_i} \right) \quad (20)$$

在  $T_r$  给定下, 通过最大化式(19)中定义的  $\rho_{\text{eff}}^*$ , 可以得到如下的训练阶段和数据传输阶段的功率分配方案(假定发射机可以实现功率等级的切换):

**定理 2** (最优的功率分配)

$$\rho_r = (1 - \alpha) \rho T_c / T_r, \rho_d = \alpha \rho T_c / T_d \quad (21)$$

$$\text{其中, } \alpha = \begin{cases} \gamma - \sqrt{\gamma(\gamma - 1)}, & T_d > K^2/N_i \\ 0.5, & T_d = K^2/N_i \\ \gamma + \sqrt{\gamma(\gamma - 1)}, & T_d < K^2/N_i \end{cases}$$

$$\rho T_c = \rho_r T_r + \rho_d T_d, \gamma = \frac{K^2/N_i + \rho T_c}{\rho T_c (1 - K^2/N_i T_d)}$$

将定理 2 应用于式(20), 便可清晰地求解出  $C_{\text{worst}}$  与  $T_r$  的关系, 从而推导出如下的结论:

**定理 3** (最优的训练序列长度) 对于任意的  $\rho$  和  $T_c$ , 使  $C_{\text{lb}}$  最大化的最优的训练序列长度为  $T_r = K^2/N_i$ , 此时有:

$$C_{\text{lb}} = E \frac{T_c - K^2/N_i}{T_c} \log \det \left( I_{N_i} + \rho_{\text{eff}}^* \frac{\bar{H}^H \bar{H}}{N_i} \right) \quad (22)$$

其中,

$$\rho_{\text{eff}}^* = \begin{cases} \frac{\rho T_c}{T_c - 2 \frac{K^2}{N_i}} (\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma - 1})^2, & T_c > 2 \frac{K^2}{N_i} \\ \frac{\rho^2}{1 + 2\rho}, & T_c = 2 \frac{K^2}{N_i} \\ \frac{\rho T_c}{2 \frac{K^2}{N_i} - T_c} (\sqrt{-\gamma} - \sqrt{-\gamma + 1})^2, & T_c < 2 \frac{K^2}{N_i} \end{cases}$$

说明: 定理 2 和定理 3 的结论可以看作是文献[7]中的相应结论在相关信道下的推广, 两者的分析思路和证明步骤很类似, 故这里不再给出具体的证明细节. 不同的是: 式(22)中的  $\bar{H}$  存在相关性, 其奇异值个数为  $K$ ; 当  $K^2/N_i$  不是整数时, 因为实际中发送的训练序列长度为符号周期的整数倍, 需要取  $T_r = \lceil K^2/N_i \rceil$  (向上取整).

### 4.3 直观解释

从估计理论来看, 为了得到有效(有意义)的估计, 要求独立的观测数据样本数目要不小于待估的独立参数的数目. 从数学角度来看(忽略噪声影响), 式可以看作是一个包含有  $N_i T_r$  个方程的方程组, 其未知参数个数为  $N_i N_i$ , 该方程组有唯一解的前提是其为适定或者

超定一致方程组. 于是, 如果信道向量  $\mathbf{h}$  中各元素相互独立, 则要求  $T_r \geq N_t$ ; 对于  $\text{rank}(\mathbf{R}_t) = K$  而无接收端空域相关的情况, 信道向量  $\mathbf{h}$  中独立元素个数为  $KN_t$ , 若发射机未知任何信道信息, 则理论上要求  $T_r \geq K$ ; 当发射机已知  $\mathbf{R}_t$  时, 通过采用最优的训练序列进一步降低 MSE 后, 可以使所需的训练长度要求放宽为  $T_r \geq \lceil K^2/N_t \rceil$ .

对于其他情况(如收发两端均存在空域相关), 很难通过 4.2 节的推导思路得出关于  $\sigma_h^2$  与参数  $(T_r, \rho_r)$  的显式的数学描述, 从而尚未能得出明确的最优的训练序列长度与相关性的关系. 从概念上讲, 这主要是因为虽然信道的相关性使得信道矩阵中的独立未知参数数目减小, 但接收端相关性的存在同样会使得独立的观测数据样本数目变小, 加大了分析的难度.

### 5 仿真结果和分析

(1) 验证定理 1 所给的训练序列设计方法的估计性能. 假定一个 4 发 4 收的 MIMO 信道, 收发两端都存在空域相关性, 采用指数相关系数生成函数, 令  $R_t(i, j) = R_r(i, j) = r^{|i-j|}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . 其中,  $r (|r| \leq 1)$  定义为空域相关系数 ( $|r|$  越大, 相关性越强). 图 1 明确地给出了分别采用正交和最优的训练序列情况下的估计性能比较 ( $T_r = 4$ ). 可以看出, 空域相关性越强, 均方误差越小, 也就是说, 空域相关性有助于减少信道估计误差. 采用最优训练序列可以获得比正交训练序列更低的估计误差, 这在较低信噪比和相关性较强时尤其明显.

(2) 考查训练长度对估计性能的影响. 以如下三种情况的比较为例: ① 假定无空域相关, 即取  $T_r = N_t = 4$ ; ② 假定无接收相关, 而  $\mathbf{R}_t$  不满秩, 其只有三个非零特征值, 分别为 2、1.5 和 0.5 ( $\text{tr}(\mathbf{R}_t) = 4$ ). 此时,  $K = 3$ , 取  $T_r = \lceil 3^2/4 \rceil = 3$ ; ③ 作为比较, 再取  $T_r = 2$ . 图 2 给出了三种情况下归一化 MSE 随信噪比变化的曲线. 由此可知, 情况 2 虽然比情况 1 减少了 25% 的训练开销, 但其估计方差仍然小于情况 1; 情况 3 比情况 1 减少了 50% 的训练开销, 其估计方差在低信噪比时依然优于情况 1. 这说明相关信道下使用较少的训练符号仍旧可以获得不差于独立信道情况下的估计性能, 从某种角度来看, 正是这样的特性才导致了相关信道下最优的训练序列长度小于发射天线数目的结论.

(3) 分析定理 3 所给最优训练序列长度的合理性. 具体信道环境是:  $N_t = 8, N_r = 12, T_r = 20$ , 接收端无空域相关. 发射端平均到达角沿阵列法向方向, 服从标准差为  $3.5^\circ$  的高斯角谱分布(相当于同方差的角度扩展是  $12^\circ$  的均匀角谱分布). 图 3 中通过 Monte Carlo 仿真分别

给出了发射端天线间距  $d_t = 0.5, 2$  倍波长, 平均发射功率  $\rho = 0, 5, 10\text{dB}$  取值下, 不同训练长度与对应的容量下界的关系曲线. 当  $d_t = 0.5$  时, 可以计算出  $K = \text{rank}(\mathbf{R}_t) = 4$ , 按照定理 3 的结论有最优的  $T_r = \lceil 4^2/8 \rceil = 2$ . 观察图 3 中的点划线可知, 三种平均功率下  $T_r = 2$  均对应着容量下界的最大值; 当  $d_t = 2$  时, 计算得出  $K = 6$ , 故最优的  $T_r = \lceil 6^2/8 \rceil = 5$ . 对应图 3 中的实线曲线,  $\rho = 0$  和  $5\text{dB}$  下,  $T_r = 4$  时容量下界最大,  $\rho = 10\text{dB}$  时,  $T_r = 5$  时容量下界最大. 由此可知, 定理 3 的结论是正确的.

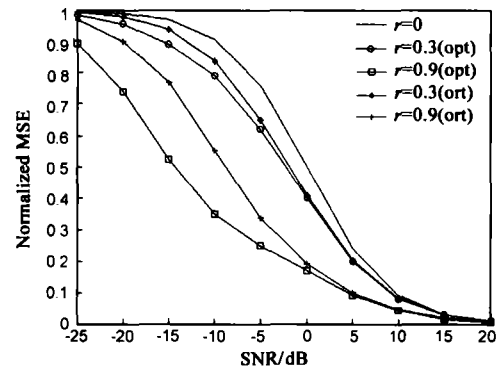


图 1 最优和正交训练估计均方误差比较

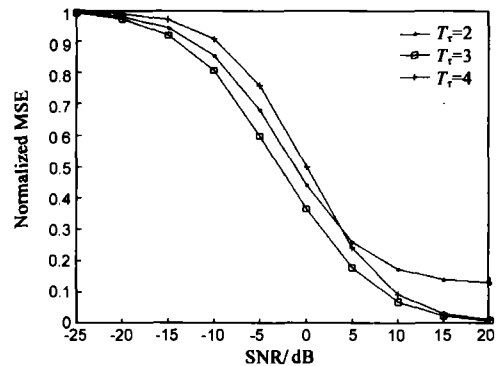


图 2 相关信道下训练长度与估计精度的关系

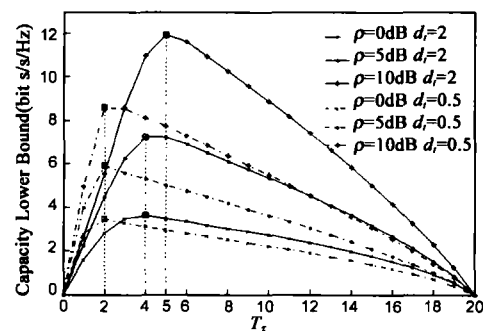


图 3 容量下界与训练序列长度的对应关系

### 6 结论

本文根据 MMSE 准则设计了一种适用于相关 MIMO 信道估计的训练序列结构, 并从估计准确性和数据传输速率最大化的最优折中的角度出发, 分析了只存在发射端空域相关时的基于训练估计机制的 MIMO 系

统的容量下界,并给出了最优的训练序列长度的具体取值.分析和仿真表明,对于同等长度的训练序列,信道的相关性有助于降低估计均方误差;对于同等的估计均方误差要求,相关信道所需要的训练长度要小于独立信道;对于只存在发射端空域相关的 MIMO 信道,使得信道容量最大的最优训练长度不再等于发射天线数目,而与信道的空域相关性直接有关.

#### 参考文献:

- [1] I E Telatar. Capacity of multi-antenna Gaussian channels[J]. *European Transactions on Telecommunications*, 1995, 10(6): 585 - 595.
- [2] G J Foschini, M J Gans. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas [J]. *Wireless Personal Communication*, 1998, 6(3): 311 - 335.
- [3] X-H Yu, G Chen, M Chen, X Gao. Toward beyond 3G: The FuTURE project in China [J]. *IEEE Communications Magazine*, 2005, 43(1): 70 - 75.
- [4] M Steer. Beyond 3G[J]. *IEEE Microwave Magazine*, 2007, 8(1): 76 - 82.
- [5] L Tong, B M Sadler, M Dong. Pilot-assisted wireless transmissions: General model, design criteria and signal processing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2004, 21(6): 12 - 25.
- [6] L Zheng, D Tse. Communication on the Grassmann manifold: a geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48(2): 359 - 383.
- [7] B Hassibi, B Hochwald. How much training is needed in multiple-antenna wireless links[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2003, 49(4): 951 - 963.
- [8] D Shiu, G J Foschini, M J Gans, J M Kahn. Fading correlation and its effect on the capacity of multielement antenna systems [J]. *IEEE Trans. Communications*, 2000, 48(3): 502 - 513.
- [9] P Almers, E Bonek, A Burr, N Czink, M Debbah. Survey of Channel and Radio Propagation Models for Wireless MIMO Systems [J]. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, Article ID 19070, 2007.
- [10] M Kiessling, J Speidel. Statistical transmit processing for enhanced MIMO channel estimation in presence of correlation [A]. In *Proc. IEEE GLOBECOM* [C]. San Francisco, USA, 2003. 2411 - 2415.
- [11] J H Kotecha, A M Sayeed. Transmit signal design for optimal estimation of correlated MIMO channels [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(2): 546 - 557.
- [12] J P Kermoal, L Schumacher, K I Pedersen. A stochastic MIMO radio channel model with experimental validation [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2002, 20(6): 1211 - 1226.
- [13] F A Dietrich, W Utschick. Pilot-assisted channel estimation based on second-order statistics [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(3): 1178 - 1193.
- [14] J Pang, J Li, L Zhao, Z Lu. Optimal training sequences for MIMO channel estimation with spatial correlation [A]. In *Proc. IEEE 66th Vehicular Technology Conf* [C]. Baltimore, USA, 2007.
- [15] E A Jorswieck, H Boche. Channel capacity and capacity-range of beamforming in MIMO wireless systems under correlated fading with covariance feedback [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2004, 3(5): 1543 - 1553.
- [16] A W Marshall, I Olkin. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications* [M]. New York: Academic Press, 1979.

#### 作者简介:



**庞继勇** 男, 1981 年 11 月生于山西省侯马市, 分别于 2003 年和 2006 年在西安电子科技大学获得通信与信息系统工学学士和硕士学位. 在读博士生, 主要研究方向为宽带 MIMO 多天线系统. E-mail: pjy1121@163.com



**李建东** 男, 1962 年生于江苏省阜宁县. 1990 年获西安电子科技大学工学博士学位. 现任西安电子科技大学研究生院院长和 ISN 国家重点实验室主任、博士生导师. 从事宽带无线 IP 技术、移动通信、软件无线电、ad hoc 自组织网络等方面的研究. E-mail: jdli@mail.xidian.edu.cn